Definitionen

beschränkt

$$\exists K \in \mathbb{R}_{>0} : \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$$

bestimmte Divergenz

$$\lim(a_n) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > K$$

Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

Divergenz Eine Folge divergiert genau dann, wenn es keinen Grenzwert gibt.

ϵ-Umgebung von a

$$]a - \epsilon, a + \epsilon[\quad \text{für} \quad \epsilon > 0, a \in \mathbb{R}$$

Grenzwert a

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |a_n - a| < \epsilon$$

Häufungspunkt Ist a ein Häufungspunkt von (a_n), so sind in der ϵ-Umgebung von a unendlich viele Elemente von (a_n). Daher gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n), für die gilt: $\lim(a_{n_k}) = a$

Konvergenz Eine Folge konvergiert genau dann, wenn es einen Grenzwert gibt.

Monotonie

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_n < a_{n+1} & \text{streng monoton steigend} \\ a_n \leq a_{n+1} & \text{monoton steigend} \\ a_n > a_{n+1} & \text{streng monoton fallend} \\ a_n \geq a_{n+1} & \text{monoton fallend} \end{cases}$$

Nullfolge Eine konvergente Folge, deren Grenzwert 0 ist.

Teilfolge Eine Teilfolge (a_{n_k}) einer Folge (a_n) enthält alle Elemente von (a_n), die den Index n aus der streng monotonen Folge (n_k) haben, wobei $\forall k \in \mathbb{N} : (n_k) \in \mathbb{N}$.

Aussagen

- Eine Folge hat höchstens einen Grenzwert.

$$(\lim(a_n) = a \wedge \lim(a_n) = b) \Rightarrow a = b$$

- Eine Folge ist entweder konvergent oder divergent.
- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Unterscheiden sich zwei Folgen nur in endlich vielen Gliedern, haben sie den gleichen Grenzwert.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n = b_n \Rightarrow \lim(a_n) = \lim(b_n)$$

- Sofern die Grenzwerte definiert sind, gilt:

$$\begin{aligned}\lim \alpha(a_n) + \beta \lim(b_n) &= \lim \alpha(a_n) + \beta(b_n) \\ \lim(a_n) + \lim(b_n) &= \lim(a_n + b_n) \\ \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) &= \lim(a_n \cdot b_n) \\ \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} &= \lim \frac{a_n}{b_n}\end{aligned}$$

- Ist (a_n) eine Nullfolge und ist (b_n) beschränkt, so ist $(a_n \cdot b_n)$ eine Nullfolge.
- Sind fast alle Glieder einer Folge nicht negativ, so ist auch der Grenzwert nicht negativ.

$$\exists a = \lim(a_n) : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

- Sandwich-Prinzip

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : a_n \leq b_n \leq c_n \Rightarrow \lim(a_n) \leq \lim(b_n) \leq \lim(c_n)$$

Spezialfall:

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) \Rightarrow \lim(a_n) = \lim(b_n) = \lim(c_n)$$

- Ist eine Folge monoton steigend oder fallend und beschränkt, so ist sie konvergent.
- Satz von Bolzano-Weierstraß: Ist eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ beschränkt, so hat sie mindestens einen Häufungspunkt und damit mindestens eine konvergente Teilfolge.
- Eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
- Jede Folge in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Verhalten bekannter Folgen

$$\begin{aligned}\lim a &= a \\ \lim \frac{1}{n} &= 0 \\ \lim \frac{1}{\sqrt[r]{n}} &= 0 \\ \lim \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim n^r q^n &= 0 \text{ für } |q| < 1 \\ \lim(1 + \frac{1}{n})^n &= \mathrm{e} \\ \lim n &= +\infty \\ (a_n) &= (-1)^n \text{ ist divergent} \\ \lim \frac{q^n}{n^r} &= +\infty \text{ für } q > 1\end{aligned}$$