Definitionen

affiner Teilraum Menge, die durch Addition eines Vektors v_0 zu allen Vektoren eines Vektorraumes V entsteht

ähnliche Matrizen Matrizen, die das gleiche charakteristische Polynom haben

algebraische Vielfachheit Anzahl der Nullstellen eines (charakteristischen) Polynoms

antisymmetrische Matrix Matrix, bei der das Negieren aller Koeffizienten die Transponierte ergibt

Basis Menge von Vektoren eines Vektorraumes V, durch deren eindeutige Linearkombination jeder Vektor aus V dargestellt werden kann

Bild $\forall L : V \rightarrow W : \{w \in W | \exists v \in V : L(v) = w\}$

charakteristisches Polynom $\det(A - x\mathbb{E}^n)$

Corang $\text{Corang}(L) = \dim(\text{Kern}(L))$

Determinantenform alternierende Multilinearform, die für die kanonische Basis als Parameter den Wert 1 annimmt

Diagonalisierbare Matrix Matrix, aus deren Eigenvektoren eine Basis für den verwendeten Vektorraum gebildet werden kann

Dimension Anzahl der Vektoren eines Vektorraumes, die für dessen Basen notwendig sind

Eigenvektor Vektor, der die Gleichung $A \circ v = \lambda v$ erfüllt, ohne der Nullvektor zu sein

Eigenraum $\text{Kern}(A - \lambda\mathbb{E}^n)$ für die verschiedenen Eigenwerte

Eigenwert Multiplikator λ für den Eigenvektor in $A \circ v = \lambda v$

Einheitsmatrix Matrix, bei der alle Komponenten auf der Hauptdiagonalen den Wert 1 und alle sonstigen Komponenten den Wert 0 haben

Erzeugendensystem Menge von Vektoren, die einen Spann bilden

geometrische Vielfachheit Dimension des Eigenraums eines Eigenwertes

Hermitesches Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = \sum_i v_i \overline{w_i}$

homogenes Gleichungssystem Gleichungssystem, bei dem alle konstanten Terme Null sind

Identität $\forall v \in V : L(v) = v$

inhomogenes Gleichungssystem Gleichungssystem, bei dem mindestens ein konstanter Term nicht Null ist

inneres Produkt

$$\forall u = (u_1, \ldots, u_n) \in V, v = (v_1, \ldots, v_n) \in V : \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

inverse Matrix für die zu A inverse Matrix gilt $A \circ A^{-1} = \mathbb{E}^n$

invertierte Abbildung lineare Abbildung, die den Bildvektoren einer Ursprungsabbildung die Ursprungsvektoren zuordnet

isomorphe Vektorräume Vektorräume, zwischen denen ein Isomorphismus existiert

Isomorphismus bijektive lineare Abbildung

kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$ Spaltenvektoren von $\mathbb{E}^n$; auch Standardbasis genannt

Kern $\{v \in V | L(v) = 0\}$

Koordinaten Vorfaktoren der Darstellung des Vektors als Linearkombination einer fest bestimmten Basis

Lineare Abbildung $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$

Linearfaktor Faktor der Form $(x - n)$ mit $n \in \mathbb{C}$

Linearkombination Ausdruck u der n Vektoren v_i mit den jeweiligen Faktoren $\alpha_i \in \mathbb{R}$ in der Form

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

linear unabhängig

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in V : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \forall i : \alpha_i = 0$$

Multilinearform lineare Abbildung, für die gilt $F(\dots, \alpha v + \beta w, \dots) = \alpha F(\dots, v, \dots) + \beta F(\dots, w, \dots)$. Ändert sich zusätzlich beim Vertauschen zweier Argumente das Vorzeichen, wird von einer alternierenden Multilinearform gesprochen.

Nullmatrix quadratische Matrix, deren sämtliche Koeffizienten Null sind

Nullabbildung $\forall u \in V : L(u) = 0$

Rang $\text{Rang}(L) = \dim(\text{Bild}(L))$

Spaltenrang Rang der zu der Matrix A gehörigen linearen Abbildung

Spann Menge aller Linearkombinationen einer Menge von Vektoren; wird auch *lineare Hülle* genannt.

Spur Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen einer Matrix

symmetrische Matrix (quadratische) Matrix, die gleich ihrer Transponierten ist

Transformationsmatrix quadratische Matrix S, die einen Vektor in einer anderen Basis darstellt

Transponierte einer Matrix Matrix, in der die Spaltenvektoren der Ursprungsmatrix Zeilenvektoren sind

Übergangsmatrix Matrix, deren Spalten die Bilder der Basisvektoren enthält

Unterraum Teilmenge eines Vektorraumes, die wiederum die Anforderungen an einen Vektorraum erfüllt

Vektor Elemente eines Vektorraumes

Vektorraum Menge über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn $\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{K} : (u + v), (\lambda u) \in V$

Zeilenrang Rang der zu der Matrix A^T gehörigen linearen Abbildung

Aussagen

Wenn $v_1, ..., v_n \in V$, dann bildet $\text{Span}\{v_1, ..., v_n\}$ einen Unterraum von V.

Die Vektoren einer Menge M sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren von durch eine Linearkombinationen der anderen Vektoren dargestellt werden kann.

Eine Menge B ist genau dann Basis eines Vektorraumes V, wenn die Elemente aus B linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem von V bilden

Gibt es ein Erzeugendensystem von V aus n Vektoren, so hat jede Menge linear unabhängiger Vektoren aus V höchstens n Elemente.

Alle Basen eines Vektorraumes sind gleich groß.

Hat ein Unterraum W von V die gleiche Dimension wie W, so gilt $W = V$.

Sowohl die Summe als auch die Verkettung zweier linearer Abbildungen ist wieder eine lineare Abbildung.

Die Menge der linearen Abbildungen von dem Vektorraum V in den Vektorraum W bildet ebenfalls einen Vektorraum $L(V, W)$.

Sowohl Bild als auch Kern sind lineare Unterräume des relevanten Vektorraums.

Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern nur aus dem Nullvektor besteht.

Eine Abbildung wird durch die Bildvektoren einer Basis vollständig und eindeutig bestimmt.

Eine Übergangsmatrix ist eine äquivalente Darstellung einer Abbildung in Bezug auf eine Basis.

Für die Multiplikation von Matrizen gilt – innerhalb der für Multiplikation und Addition geltenden Grenzen – das Assoziativ- und Distributivgesetz.

Die Multiplikation von Matrizen ist nicht nullteilerfrei.

Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element der Multiplikation bei Matrizen.

Eine lineare Abbildung ist genau dann bijektiv, wenn sie invertierbar ist.

Die Inverse einer invertierbaren linearen Abbildung ist wiederum eine lineare Abbildung.

Bilder linear unabhängiger Vektoren sind bei einem Isomorphismus wieder linear unabhängig.

Ein Isomorphismus bildet Elemente zwischen Vektorräumen gleicher Dimension ab.

Jeder Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{K}^n$.

Eine Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn sowohl die Spalten- als auch die Zeilenvektoren der dazugehörigen Abbildungsmatrix linear unabhängig sind.

Eine Abbildung $L : V \to W$ ist genau dann invertierbar, wenn $\text{Rang}(L) = \dim(V) = \dim(W)$.

Für eine invertierbare Abbildung $L : V \to W$ gilt $\dim(V) = \dim(W)$.

Für invertierbare Matrizen A und B gilt: $(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$.

Die Spaltenvektoren einer Transformationsmatrix sind die Bilder der Basisvektoren in Bezug auf die Ursprungsbasis.

Jede Transformationsmatrix ist invertierbar.

$M_B^B(L) = S^{-1} \circ M_A^A \circ S$

$(M_A^B)^{-1} = M_B^A$

$v_A = M_B^A v_B$

Der Zeilenrang einer linearen Abbildung ist gleich ihrem Spaltenrang.

$\forall V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m : (L : V \to W)$ injektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(L) = n$

$\forall V = \mathbb{K}^n, W = \mathbb{K}^m : (L : V \to W)$ surjektiv $\Leftrightarrow \text{Rang}(m) = n$

Sind Parameter einer Multilinearform linear abhängig, so ist das Ergebnis Null.

Für jedes $n \geq 2$ gibt es genau eine Determinantenform auf $\mathbb{K}^n$.

Liefern zwei alternierende Multilinearformen auf der kanonischen Basis das gleiche Ergebnis, sind sie gleich.

Die Determinante einer Matrix ist gleich der Determinante der transponierten Matrix.

Die Determinante einer Matrix bleibt unter Addition verschiedener Spalten oder Zeilen invariant.

$|A \circ B| = |A| \cdot |B|$

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Die Determinante einer Matrix ist der Kehrwert der Determinante der invertierten Matrix.

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer Matrix sind linear unabhängig.

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix sind zueinander orthogonal.

Ein Wert ist genau dann Nullstelle des charakteristischen Polynoms, wenn es ein Eigenwert ist.

Die geometrische Vielfachheit ist kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit.

Für die Eigenvektoren λ_n mit der algebraischen Vielfachheit k_n einer Matrix A gilt Spur $A = \sum_i k_i \lambda_i$.

Für die Eigenvektoren λ_n mit der algebraischen Vielfachheit k_n einer Matrix A gilt $\det A = \prod_i \lambda_i^{k_i}$.

Eine Matrix M ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Matrix S gibt, sodass beim Ergebnis von $S^{-1} \circ M \circ S$ nur die Hauptdiagonale ungleich Null ist. Diese Matrix besteht aus den Eigen- als Spaltenvektoren.

Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerlegt werden kann und für jede Nullstelle die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Eine symmetrische Matrix mit reellen Koeffizienten ist diagonalisierbar.

Basisauswahlsatz Aus jedem Erzeugendensystem für den Vektorraum V mit mindestens einem Element kann eine Basis von V ausgewählt werden.

Basisergänzungssatz Ist M ein Erzeugendensystem von V und bildet die Menge linear unabhängiger Vektoren M' keine Basis von V, so kann M' durch geeignete Wahl von Elementen aus M zu einer Basis ergänzt werden.

Cramersche Regel Lässt sich ein Gleichungssystem mit einer quadratischen Matrix A mit $|A| \neq 0$ in der Form $A \circ x = b$ schreiben, so hat die Lösung die Form $x_i = |A_i|/|A|$, wobei A_i die Matrix ist, die entsteht, wenn man bei der Matrix A die i-te Spalte durch b ersetzt.

Fundamentalsatz der Algebra Jedes nichtkonstante Polygom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle.

Linearfaktorzerlegung Jedes nichtkonstante Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden.

Dimensionsformel Sei L eine lineare Abbildung aus V. Dann gilt

$$\dim(\mathrm{Kern} L) + \dim(\mathrm{Bild} L) = \dim(V)$$