Definitionen

Absolute Konvergenz Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Konvergenzradius Für eine Potenzreihe mit dem Konvergenzbereich K und Konvergenzradius R gilt:

$$R := \sup\{(z-a)|z \in K\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

Konvergenzbereich Für eine Potenzreihe $P(z)$ lautet die Definition für den Konvergenzbereich K

$$K := \{z \in \mathbb{C}|P(z) \text{ konv.}\}$$

Partialsumme Werden alle Glieder einer Folge bis zu einem beliebigen aber fest gewählten Index aufsummiert, so erhält man die Partialsumme.

Potenzreihe Sei (c_k) Folge in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ so hat eine Potenzreihe die Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)$$

mit den Koeffizienten (c_k) und dem Entwicklungspunkt a.

Reihe Eine Reihe ist die Folge aller Partialsummen.

Summe der Reihe Bezeichnung für den Grenzwert einer Reihe. Die Schreibweise entspricht der einer Reihe.

Aussagen

- Für konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ in $\mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\mathbb{R}$ sowie und deren Grenzwerte gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n + w_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$
$$c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} c \cdot z_n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

- Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$, so gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

- Eine Reihe konvergiert genau dann, wenn

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

- Unterscheidet sich eine Reihe von einer anderen, konvergenten Reihe nur in endlich vielen Partialsummen, so ist sie konvergent.
- Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, so ist (z_n) eine Nullfolge
- Verträglichkeit der Addition und Vergleichsrelation für $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = A, \sum_{k=0}^{\infty} b_k = B$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + b_k = A + B$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha A$$
$$\forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k \Rightarrow A \leq B$$

- Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.
- Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist nicht leer, da mindestens für $z = a$ die Potenzreihe konvergiert.
- Der Konvergenzradius R berechnet sich – sollte der Grenzwert definiert sein – wie folgt:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$$

Konvergenzkriterien

Ähnlichkeit

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : a_k = b_k \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konv.} \right)$$

Cauchy-Kriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq k \geq N : \left| \sum_{n=k}^{m} z_n \right| < \epsilon$$

Leibniz-Kriterium Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, in $\mathbb{R}$, dann konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

Majoranten-Kriterium Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$, dann gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : |a_k| \leq |b_k| \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ absolut konv.} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konv.} \right)$$

Quotienten-Kriterium Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ und gilt

$$\exists q < 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Wurzel-Kriterium Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ und gilt

$$\exists q < 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N : \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$$

so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Verhalten bekannter Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{für } |q| \geq 1 \end{cases} \qquad \text{geometrische Reihe}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \qquad \text{harmonische Reihe}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \text{ absolut konvergent} \qquad \text{Exponentialreihe}$$