

Fortgeschrittenenpraktikum

Tom Heinrich, Daniela Rolf, Guido Falk von Rudorff
Martina Corso (Tutorin)

08.02.2012 (Versuch), 14.02.2012 (Auswertung)

1 Zeeman-Effekt

Physikalische Grundlagen

Dieser Versuch befasst sich mit der Untersuchung der magnetfeldabhängigen Aufspaltung von Spektrallinien im Rahmen des ZEEMAN-Effekts. Dazu wird ein Ausschnitt des Quecksilber-Dampflampen-Spektrums mit Hilfe eines FABRY-PÉROT-Interferometers vermessen.

Auswahlregeln Nicht alle Übergänge zwischen beliebigen Zuständen sind erlaubt. Der Begriff „erlaubt“ ist nicht zu eng zu sehen – verbotene Übergänge können zwar auftreten, sind dann aber deutlich schwächer als die erlaubten, da die hier verwendete Definition [3] vorsieht, dass das Dipolmatrixelement D_{ik} für den Übergang $E_i \rightarrow E_k$ ungleich Null sein soll.

$$D_{ik} = \int \langle \psi_i | \hat{r} | \psi_k \rangle \quad (1.1)$$

Verbotene Übergänge können v.a. dann beobachtet werden, wenn – wie hier durch das Magnetfeld – eine äußere Störung erfolgt. Generell gelten die Regeln

$$\Delta l = \pm 1 \quad ; \quad \Delta m_l = \Delta m_j = \Delta M_L = 0, \pm 1 \quad (1.2)$$

$$\Delta j = 0, \pm 1 \quad ; \quad \Delta s = \Delta S = 0 \quad (1.3)$$

$$\Delta L = 0, \pm 1 \quad (1.4)$$

Einzige Ausnahme: $\Delta j = 0$ ist nur für $j \neq 0$ erlaubt. Diese Regeln lassen sich mit der Drehimpulserhaltung erklären. $\Delta S = 0$ gilt nur für Atome, bei denen die Spin-Bahn-Kopplung schwach ist. Dann kann die Wellenfunktion Φ als Produkt der Ortsfunktion Ψ und Spinfunktion χ geschrieben werden. Für das Dipolmatrixelement gilt dann

$$D_{ik} = \int \Phi_i^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \hat{r} \Phi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (1.5)$$

$$= \int \Psi_i^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_i^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \hat{r} \Psi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \chi_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (1.6)$$

da $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ für Singulettzustände mit $S = 0$ symmetrisch und andernfalls antisymmetrisch ist, kann D_{ik} nur konstant bleiben, wenn $\Delta S = 0$ gilt.

Im Versuch wird nach Tab. (1.1) eine schwache Linie bei 577 nm beobachtet, bei der $\Delta S \neq 0$ gilt.

Polarisation Ausgehend vom Dipolmoment in Glg. (1.1) kann man zeigen, dass die Polarisation des beim Übergang $E_i \rightarrow E_k$ emittierten Lichtes von $\Delta m = m_i - m_k$ abhängt. Für $\Delta m = 0$ ergibt sich linear polarisiertes π -Strahlung, für $\Delta m = -1$ zirkular polarisiertes σ^+ -Licht und analog für $\Delta m = 1$ zirkular polarisiertes σ^- -Licht. Beim \rightarrow normalen ZEEMAN-Effekt wird die π -Strahlung in Magnetfeldrichtung linear polarisiert, kann also nur senkrecht zum Magnetfeld beobachtet werden und entspricht der Energie der Strahlung ohne anliegendes Magnetfeld. Die anderen beiden Komponenten können aus allen Richtungen beobachtet werden, sind aber entgegengesetzt zirkular in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld polarisiert und erscheinen daher für den Betrachter, der senkrecht zur Magnetfeldrichtung beobachtet, linear senkrecht zum Magnetfeld polarisiert.

g-Faktor Der LANDÉ-Faktor g_j beschreibt [3] den Zusammenhang zwischen dem Gesamtdrehimpuls \vec{j} und dem magnetischen Moment

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = -\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{l} - \frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{s} \quad (1.7)$$

mit $g_s \simeq 2$. Es gilt unter Berücksichtigung des Präzedierens der Vektoren

$$\langle \mu_j \rangle = g_j \frac{\mu_B}{\hbar} |\vec{j}| \quad (1.8)$$

mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (1.9)$$

Für das 7^3S_1 -Niveau von Quecksilber gilt $g_j = 2$ und für das 6^3P_2 -Niveau $g_j = 3/2$.

normaler Zeeman-Effekt Der normale ZEEMAN-Effekt gilt für $S = 0$ und lässt sich noch anhand eines (halb-)klassischen Modells beschreiben. Dazu wird angenommen [3], dass sich Elektronen auf festen Kreisbahnen mit Radius r_0 um den Atomkern bewegen und einen quantisierten Drehimpuls

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (1.10)$$

besitzen. Einflüsse durch den Spin der Elektronen werden in diesem Modell nicht berücksichtigt.

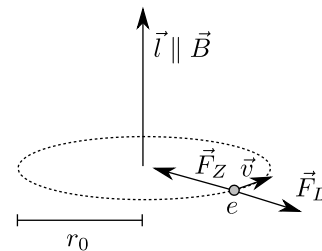


Abb. 1.1: klassisches LORENTZ-Modell mit der Drehbewegung des Elektrons e auf der Kreisbahn (gestrichelt) mit Radius r_0 und Geschwindigkeit \vec{v} , sodass sich der Drehimpuls \vec{l} und die Zentrifugalkraft \vec{F}_Z ausbilden sowie – bei angelegtem Magnetfeld \vec{B} – die LORENTZ-Kraft \vec{F}_L einstellt

Nimmt man an, dass die Drehbewegung wie in Abb. (1.1) in der x-y-Ebene stattfindet und der Drehimpulsvektor also senkrecht auf dieser steht, so ergeben sich mit der Zentrifugalkraft und der LORENTZ-Kraft für das Magnetfeld

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

die Bewegungsgleichungen

$$m_e \ddot{x} = -m_e \omega_0^2 x + e\dot{y}B \quad (1.12)$$

$$m_e \ddot{y} = -m_e \omega_0^2 y + e\dot{x}B \quad (1.13)$$

$$m\ddot{z} = 0 \quad (1.14)$$

wobei noch

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.15)$$

gilt. Die Annahme $\vec{l} \parallel \vec{B}$ ist zulässig, weil sich der Drehimpuls immer nach dem Magnetfeld ausrichten wird. Die Lösung dieser gekoppelten inhomogenen Differentialgleichung ist eine Überlagerung gegenläufiger Rotationen mit $\omega_o \pm \omega_L$, wobei die LARMOR-Frequenz

$$\omega_L = \frac{eB}{2m_e} \quad (1.16)$$

beträgt. Mit einer neuen Koordinate x' lässt sich die Bewegungsgleichung schreiben als

$$x' = C e^{i(\omega_0 - \omega_L)t} + D e^{i(\omega_0 + \omega_L)t} \quad (1.17)$$

Wenn die Bahngeschwindigkeit erhalten bleiben soll, gibt es drei Möglichkeiten: ist $C = 0$ aber $D \neq 0$, so ergibt sich eine Rotation mit der Energie $E_\alpha = \hbar(\omega_0 + \omega_L)$ und bei dem symmetrischen Fall $D = 0$ und $C \neq 0$ erhält man $E_\beta = \hbar(\omega_0 - \omega_L)$. Die dritte Variante ist $C = D$. Damit gilt

$$x' = C(e^{i(\omega_0 - \omega_L)t} + e^{i(\omega_0 + \omega_L)t}) = C e^{i\omega_0 t} \quad (1.18)$$

und daher $E_\gamma = \hbar\omega_0$. Es gibt also eine Aufspaltung der Energien in drei Niveaus, deren Frequenzabstand $\Delta\nu$

$$\Delta\nu = \frac{\mu_B}{h} \quad (1.19)$$

mit dem BOHRschen Magneton μ_B beträgt. Da der Drehimpuls \vec{l} und insbesondere dessen z -Komponente $l_z = m\hbar$ quantisiert ist, können nur ganzzahlige Vielfache von \hbar auf die Strahlung übertragen werden. Nach den \rightarrow Auswahlregeln gilt jedoch $\Delta m = 0, \pm 1$, sodass man mit $\Delta m = 0$ Licht mit dem Drehimpuls 0 – also linear polarisiertes Licht – erwartet und ansonsten zwei Komponenten mit entgegengesetzt zirkular polarisiertem Licht erwartet werden, deren Drehimpuls $\pm\hbar$ beträgt.

Eine alternative Erklärung [3] lässt sich über das magnetische Moment $\vec{\mu}_M$ einführen. Die zusätzliche potentielle Energie in einem Magnetfeld lautet dann

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\vec{\mu}_M \vec{B} \quad (1.20)$$

Mit der Nomenklatur aus Abb. (1.1) ergibt sich

$$|\mu_M| = I \cdot 2\pi r_0^2 = -\frac{evr}{2} \quad (1.21)$$

und für den Drehimpuls

$$|\vec{l}| = m_e r_0 v \quad (1.22)$$

Beide Vektoren sind parallel zur Drehachse, also gilt

$$\vec{\mu}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{l} \quad (1.23)$$

Mit einem nur in z -Richtung wirkenden Magnetfeld gilt für die z -Komponente des Drehimpulses

$$\vec{\mu}_m \vec{e}_z = -\frac{e}{2m_e} m\hbar \quad (1.24)$$

Damit gilt für die Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus, die sich um $\Delta m = |m_1 - m_2|$ unterscheiden

$$\Delta E_{\text{pot}} = \mu_B B \Delta m \quad (1.25)$$

Insgesamt ergeben sich so $2l + 1$ mögliche Energieniveaus. Der Übergang der grünen Linie bei 546,07 nm erfolgt nach Tab. (1.1) von 7^3S_1 zu 6^3P_2 . Damit ergibt sich das Schema in Abb. (1.2)

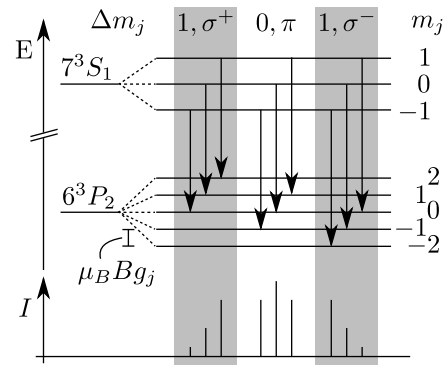


Abb. 1.2: Termschema der ZEEMAN-Aufspaltung mit dazugehörigen Intensitäten der Linien für die grüne Quecksilber-Linie im Magnetfeld nach [3, 4, 9]; die unterschiedlichen Abstände der Linien sind auf die verschiedenen g_j zurückzuführen

anomaler Zeeman-Effekt Betrachtet man den gegenüber dem \rightarrow normalen ZEEMAN-Effekt verallgemeinerten Fall von Zuständen mit $S \neq 0$, so ergibt sich der nur quantenmechanisch erklärbare anomale ZEEMAN-Effekt. Zwar bleibt der aus der Spin-Bahn-Kopplung resultierende Gesamtdrehimpuls

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad (1.26)$$

auch im äußeren Magnetfeld dem Betrag nach erhalten, allerdings präzediert er um die z -Achse, weil das Magnetfeld ein Drehmoment ausübt. \vec{j} und $\vec{\mu}_j$ sind nicht mehr parallel; $\vec{\mu}_j$ präzediert um den Erwartungswert $\langle \vec{\mu}_j \rangle$, der sich aus der Projektion von $\vec{\mu}_j$ auf \vec{j} ergibt [3].

$$\langle \vec{\mu}_j \rangle = \frac{\vec{\mu}_j \vec{j}}{|\vec{j}|} = -\frac{e}{2m_e} \left(\frac{\vec{l} \vec{j}}{|\vec{j}|} + \frac{g_s \vec{s} \vec{j}}{|\vec{j}|} \right) \quad (1.27)$$

Durch Quadrieren von Umformungen von Glg. (1.26) können die Skalarprodukte ersetzt werden

$$\vec{l} \vec{j} = \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)) \quad (1.28)$$

$$\vec{s} \vec{j} = \frac{\hbar^2}{2} (j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)) \quad (1.29)$$

Damit ergibt sich Glg. (1.9) und

$$\langle \mu_j \rangle_z = -m_j g_j \mu_B \quad (1.30)$$

sodass die Energieaufspaltung zwischen zwei Energieniveaus mit $\Delta m = |m_1 - m_2|$

$$\Delta E_{\text{pot}} = g_j \mu_B B \Delta m \quad (1.31)$$

beträgt.

Fabry-Pérot-Interferometer Das Interferometer besteht aus zwei planparallelen Platten, deren Oberflächen jeweils teilverspiegelt sind, sodass ein Teil der einfallenden Strahlung durchgelassen wird und somit auch einen Teil der Wellenfront bildet, während der Rest wieder zurück in das Spalt reflektiert wird. Vor diesem optischen Resonator befindet sich ein Mikroskopaufbau, sodass die Objektivbrennweite bei der Justierung des Aufbaus zu berücksichtigen ist. Von der Strahlungsquelle aus betrachtet, findet sich zunächst eine Sammellinse, die aus der Punktlichtquelle annähernd eine Flächenlichtquelle macht und hinter der sich ein Kollimator befindet. Der Abstand zwischen diesen beiden Linsen muss der Brennweite der Kollimatorlinse entsprechen. Im Okular sind dann konzentrische Ringe zu beobachten, die HAIDINGERSche Ringe genannt werden. Um auf diese Weise mehrere versetzte Strahlengänge zu erhalten, ist der Anteil der reflektierten Strahlen recht groß und liegt [2] in etwa bei 97%. Durch den über das gesamte Material konstanten Oberflächenabstand d und den Einfallswinkel α in Bezug auf die Flächennormale kann somit der Abstand der jeweiligen Wellenbündel und damit die Weglängendifferenz δ festgelegt werden.

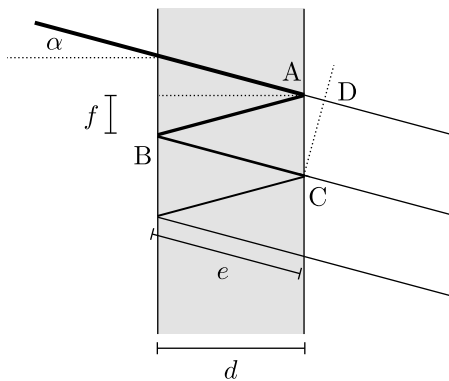


Abb. 1.3: schematischer Strahlverlauf beim FABRY-PÉROT-Interferometer für den Einfallswinkel α und die Materialdicke d

Für den Wegunterschied δ gilt nach Abb. (1.3)

$$\delta = \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AD} = 2e - \overline{AD} \quad (1.32)$$

wobei e durch Einfallswinkel und Plattenabstand ausgedrückt werden kann

$$e = \frac{d}{\cos \alpha} \quad (1.33)$$

Um nun die Strecke \overline{AD} zu erhalten, wird f berechnet.

$$f = e \sin \alpha \quad (1.34)$$

Damit gilt

$$\overline{AD} = 2e \sin^2 \alpha \quad (1.35)$$

Einsetzen ergibt

$$\delta = 2 \frac{d}{\cos \alpha} - 2 \frac{d}{\cos \alpha} \sin^2 \alpha \quad (1.36)$$

Es gilt somit der Zusammenhang

$$\delta = 2d \cos \alpha \quad (1.37)$$

Da diese Weglängendifferenz ein Vielfaches der Wellenlänge λ sein muss, um durch konstruktive Interferenz ein Intensitätsmaximum zu erzielen, gilt somit

$$\delta = z\lambda \quad (1.38)$$

Dabei stellt z die Interferenzordnung dar, sobald z ganzzahlig ist, also ein Maximum vorliegt.

Der Phasenunterschied $\Delta\varphi$ beträgt demnach

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \quad (1.39)$$

Durch die vielen Wellenbündel, deren Interferenz für die Existenz eines Maximums relevant ist, reichen bereits kleine Abweichungen von den Bedingungen aus, um einen starken Abfall der Intensität zu registrieren. Diese Empfindlichkeit wirkt sich jedoch auch auf den untersuchbaren Spektralbereich aus. Dabei gilt mit dem Bezeichner aus Abb. (1.4) der Zusammenhang

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} \quad (1.40)$$

sodass große Materialdicken, die zu großen Interferenzordnungen führen, auch nur die zeitgleiche Untersuchung eines geringen Spektrums erlauben.

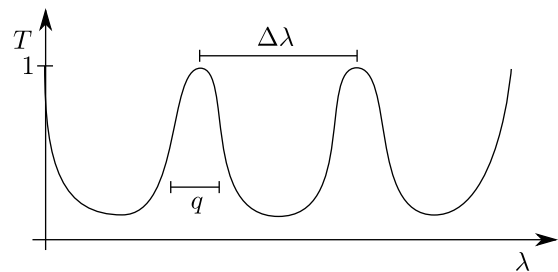


Abb. 1.4: Transmission des Interferometers mit der freien Spektralbreite $\Delta\lambda$ und der Peakbreite q nach [7]

Mit der Brennweite f des Objektivs gilt für die obige Interferenzbedingung

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2} \right) \quad (1.41)$$

Für die HAIDINGERSchen Ringe der Ordnung i gilt dann

$$d = i \frac{\lambda f^2}{r_i^2 - r_0^2} \quad (1.42)$$

wobei r_0 der Radius des innersten Ringes, des Ringes nullter Ordnung, entspricht. Die Linienbreite der HAIDINGERSchen Ringe kann hier nur geschätzt werden. Für kleine Winkel berechnet sich die Halbwertsbreite näherungsweise nach

$$2\Delta z = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} = \frac{1}{\mathcal{F}} \quad (1.43)$$

mit der Finesse \mathcal{F} . Für kleine Einfallswinkel α gilt

$$\frac{r}{f} = \tan \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha; \quad \cos \alpha \simeq 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \quad (1.44)$$

Damit ergibt sich zusammen mit Glg. (1.40)

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right) \quad (1.45)$$

Die Ringe gehören aufeinander folgenden Ordnungen an. Bezeichnet man den Radius des innersten Ringes r_0 mit der Ordnung z und den eines weiteren Ringes r_i mit der Ordnung $z+i$ so erhält man zwei Gleichungen

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r_0^2}{2f^2}\right) \quad z+i = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r_i^2}{2f^2}\right) \quad (1.46)$$

Durch Umformen und Gleichsetzen kann z eliminiert werden

$$r_i^2(i) = r_0^2 + \frac{\lambda f^2}{d} i \quad (1.47)$$

Kennt man die Wellenlänge λ eines Ringes mit dem Radius r und möchte die Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ eines Ringes mit dem Radius r' bestimmen, so erhält man zunächst mit Glg. (1.46) folgende zwei Gleichungen

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right) \quad z = \frac{2d}{\lambda + \Delta\lambda} \left(1 - \frac{r'^2}{2f^2}\right) \quad (1.48)$$

Daraus folgt

$$\Delta\lambda \left(1 - \frac{r^2}{2f^2}\right) = \frac{\lambda}{2f^2} (r^2 - r'^2) \quad (1.49)$$

Weil $r \ll f$ gilt, kann genähert werden

$$\Delta\lambda \simeq \frac{\lambda}{2f^2} (r^2 - r'^2) \quad (1.50)$$

Damit ist eine relative Wellenlängenmessung möglich.

Die spektrale Auflösung q nach Abb. (1.4) des Interferometers wird nach [7] durch die Finesse bestimmt

$$q = \frac{\Delta\lambda}{\mathcal{F}} = \frac{\Delta\lambda(1-R)}{\pi\sqrt{R}} = \frac{\lambda(1-R)}{z\pi\sqrt{R}} \quad (1.51)$$

Gasentladungslampe Die hier verwendete Hochdruck-Quecksilberdampf Lampe liefert ein Spektrum ähnlich Abb. (1.5). Dabei wird im unter Druck stehenden Quecksilbergas ein elektrisches Feld aufgebaut, in dem es zu Gasentladungen kommt. Beim Versuchsaufbau ist zu beachten, dass die Lampe einige Minuten bis zur Stabilisierung des Spektrums benötigt.

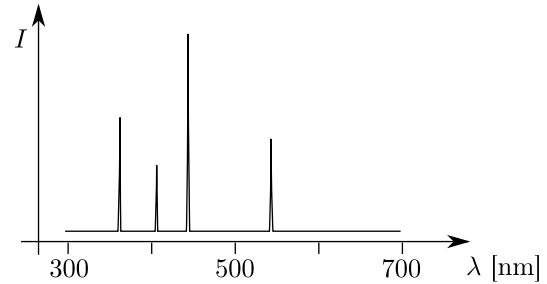


Abb. 1.5: schematisches Emissionsspektrum von Quecksilber; die Intensität I ist in beliebigen Einheiten aufgetragen; nach [6]

rel. Intensität	Wellenlänge [nm]	Übergang
60	365,0	$6^3D_3 \rightarrow 6^3P_2$
40	404,7	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_0$
100	435,8	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_1$
50	546,1	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_2$
5	577,0	$6^3D_2 \rightarrow 6^1P_1$
6	579,1	$6^1D_2 \rightarrow 6^1P_1$

Tab. 1.1: die wichtigsten Emissionslinien von Quecksilber im relevanten Wellenlängenbereich; die intensivste Linie wurde auf die relative Intensität 100 gesetzt; nach [6, 5]

Gitter-Monochromator Obwohl bereits das FABRY-PÉROT-Interferometer als Monochromator wirkt, so hilft das vorgeschaltete Gitter zur Auswahl des gewünschten Spektralbereichs. Die Funktionsweise ist in Abb. (1.6) erkennbar. Durch das Drehen des Gitters ändert sich der Spektralbereich, für den das Gerät durchlässig ist. Dieser Bereich ist verglichen mit dem des Interferometers groß und kann durch zusätzliche Blenden vor den Spiegeln verkleinert werden, sodass das Auflösungsvermögen auf Kosten der Intensität steigt.

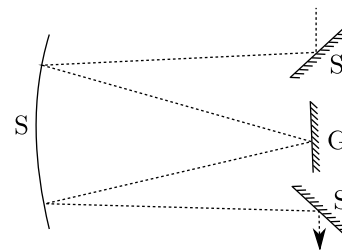


Abb. 1.6: schematischer Aufbau des Gitter-Monochromators mit den Spiegeln S und dem Gitter G nach [1]

Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abb. (1.8) skizziert, wobei der Strahlengang innerhalb des Monochromators nicht wiedergegeben wurde, sondern in Abb. (1.6) enthalten ist. Sowohl die HELMHOLTZ-Spulen, die ein möglichst homogenes Magnetfeld ergeben sollen und so platziert sind, dass der Radius der ringförmigen Spulen dem Abstand der beiden entspricht, als auch das Interferometer waren bereits justiert und mussten nicht mehr ausgerichtet werden. Weder der Teil des Aufbaus vor der zweiten Spule noch der nach dem Interferometer wurden während der Versuchsdurchführung bewegt. Alle Bauteile waren auf einer optischen Schiene montiert, um die Stabilität des Aufbaus zu gewährleisten.

Das Bild der CCD-Kamera wurde von einem Computer aufgenommen und mittels eines Labview-Programmes ausgewertet. Eine Beispielaufnahme ist in Abb. (1.7) wiedergegeben. Zur Auswertung der Messdaten wurde etwa in der Mitte der konzentrischen Kreise ein Bereich definiert, der in die Horizontale das gesamte Bild erfasste und vertikal so weit ausgedehnt war, dass die Krümmung der Ringe die Integration über diesen so definierten Bereich nicht zu sehr beeinflusste. Dieser Bereich wurde für alle Aufnahmen konstant gehalten. Für jeden Messdatensatz integrierte der Computer den Farbwert über mehrere Aufnahmen. Die Framezahl schwankte bei der Versuchsaufnahme zwischen 89 und 145 – wir warteten immer so lange, bis sich das Bild nach der Integration nicht mehr signifikant änderte.

Ein Pixel des aufgenommenen Bildes entsprach nach Versuchsdokumentation $8,6\mu\text{m}$. Da kein Fehler für diesen Wert angegeben war, wird die Umrechnung als linear und nicht fehlerbehaftet angenommen. Aufgrund der Verwendung einer Linse, die das Bild des Interferometers verkleinert ist die lineare Näherung zulässig.

Der Abstand d zwischen den Platten des FABRY-PÉROT-Interferometers war in der Versuchsanleitung gegeben und beträgt

$$d = (2,442 \pm 0,002) \text{ mm}$$

Die Hauptaufgabe bestand zunächst im Justieren des

Aufbaus ohne anliegendes Magnetfeld, sodass die Ringe scharf und die Intensität symmetrisch war.

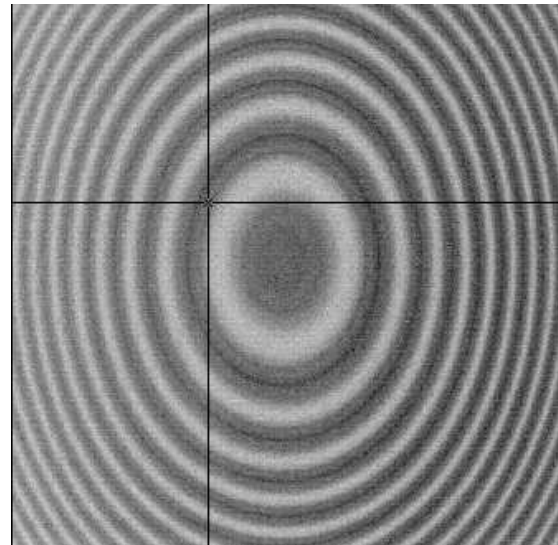


Abb. 1.7: Beispiel des Ringmusters aufgenommen für die Quecksilberlinie bei 546 nm und 20A Spulenstrom; zur besseren Wiedergabe wurden die Farbwerte mit einem Grafikprogramm geändert; deutlich erkennbar ist die Aufspaltung der hier schwarz eingefärbten Ringe

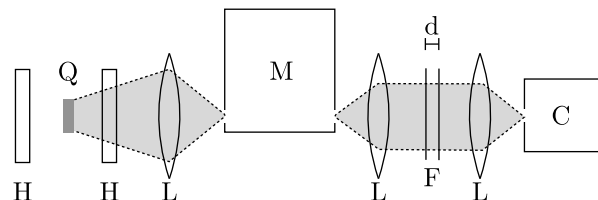


Abb. 1.8: Versuchsaufbau mit den HELMHOLTZ-Spulen H, der Quecksilberdampfampe Q, den Linsen L, dem Monochromator M, einem FABRY-PÉROT-Interferometer F, dessen Plattenabstand d beträgt und einer CCD-Kamera C

Durchführung

qualitative Beobachtung

Nach der Justierung wurde mit dem Gittermonochromator der Spektralbereich durchfahren und nach sichtbaren Spektrallinien gesucht. Die beobachteten Linien sind in Tab. (1.2) zusammen mit den Übergängen aus Tab. (1.1) aufgeführt. Dabei ist aufgefallen, dass die meisten Linien doppelt erkennbar waren: es gab eine starke und deutliche Linie und direkt daneben eine schmale und weniger intensive Linie. Da nur die gelbe Spektrallinie aus zwei dicht beieinander liegenden Linien besteht, ist zu vermuten, dass es sich um Abbildungsfehler innerhalb des Monochromators handelt. Ein Verstellen der Linsen hatte –

bis auf die variable Schärfe – keinen Einfluss auf diese Strahlform. Bei den beiden gelben Linien waren entsprechend vier Teillinien zu erkennen.

Die Werte für die Wellenlänge in Tab. (1.2) sind direkt vom Monochromator abgelesen worden. Da jedoch eine geringfügige Änderung der Wellenlängeneinstellung den auf einem Papier im Strahlengang beobachteten Strich zunächst auf dem Papier wandern ließ, wurde die Position der Monochromatoreinstellung als Messwert gewählt, bei der die Strahlung entlang der optischen Schiene möglichst zentriert auf das Interferometer auftraf. Wegen der großen Unzuverlässigkeit dieser Messmethode wurde der Fehler zu 3 nm geschätzt.

Der vorgegebene Spektralbereich von 400 bis 900 nm ist größer als der vom Menschen wahrnehmbare Bereich, der bis etwa 750 nm reicht[8]. Dabei ist die untere Grenze weniger scharf als die obere Grenze[8]. Zwei Linien, nämlich die bei (802 ± 3) nm und die bei (865 ± 3) nm liegt demnach außerhalb des sichtbaren Bereichs. Mit den wahrgenommenen Farben blau und violett ist es naheliegend, dass es sich um die zweite Beugungsordnung handelt, was den Linien bei 401 und 433 nm entspräche, die beide auch im Spektrum vorhanden sind. Damit sind alle beobachteten Linien zumindest mit den Literaturwerten verträglich.

λ [nm]	λ' [nm]	Übergang	Farbe
357*	365,0	$6^3D_3 \rightarrow 6^3P_2$	hellblau
399*	404,7	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_0$	hellblau
435 ⁺	435,8	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_1$	violett
504 ⁺	502,6	$8^3S_1 \rightarrow 6^1P_1$	blaugrün
545 ⁺	546,1	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_2$	grün
577 ⁺	577,0	$6^3D_2 \rightarrow 6^1P_1$	gelb
577 ⁺	579,1	$6^1D_2 \rightarrow 6^1P_1$	gelb
802	–	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_0$	blau
865	–	$7^3S_1 \rightarrow 6^3P_1$	violett

Tab. 1.2: beobachtete Emissionslinien mit zugehöriger Monochromatoreinstellung λ und Literaturwert λ' nach [6, 5]. Der Fehler von λ ist 3 nm; statistisch identische Werte sind mit ⁺ und verträgliche Ergebnisse mit * gekennzeichnet

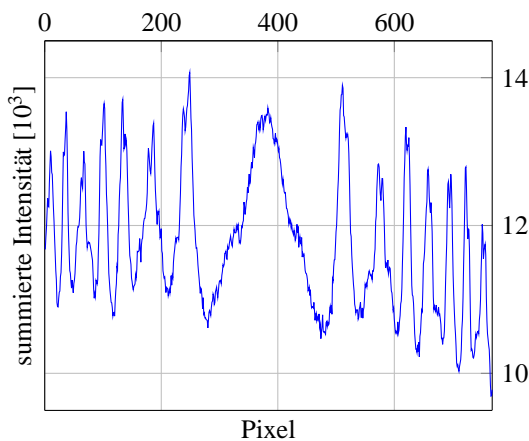


Abb. 1.9: Messergebnisse gelbe Linien ohne Magnetfeld

Ein Spalt hat bei der Justage des Aufbaus nicht geholfen: beim Anbringen hinter dem Monochromator brachten verschiedene Spaltbreiten in der Größenordnung von Zehntelmillimetern keine Verbesserung der Messergebnisse. Daher wurde auf die Verwendung eines Spalts verzichtet. Hinter dem Gittermonochromator waren zwar die beiden gelben Linien deutlich getrennt erkennbar, aber es ist nicht gelungen, die beiden Linien komplett beim Interferometer zu trennen. Wie aus Abb. (1.9) erkennbar ist, überlagern sich beide Ringsysteme. Mit einer Spaltblende direkt vor dem Interferometer wäre es aber vermutlich

möglich gewesen, die beiden Linien separat zu vermessen. Die Ringe für die grüne Linie sind klar erkennbar gewesen.

In Abb. (1.9) ist deutlich zu erkennen, dass jeweils zwei Peaks im Querschnitt durch die Ringe auftreten, was den beide nahe beieinanderliegenden Spektrallinien geschuldet ist.

Generell ist zu den hier aufgezeichneten Kurven zu berücksichtigen, dass die summierte Intensität als Zahl an sich keine Aussagekraft hat, wohl aber hilft, die Qualität der Messergebnisse einzuschätzen. Sie ist direkt abhängig von der Anzahl der summierten Frames.

Bei allen Grafiken dieser Art sind die Messpunkte verbunden, weil sonst der Kurvenverlauf nur undeutlich erkennbar wäre.

Die spätere Betrachtung mit angelegtem Magnetfeld zeigte eine deutliche Aufspaltung der Ringe, die auch ohne die Integrationsmethode zumindest zu erkennen war – für eine detailliertere Analyse, wie sie in den weiteren Aufgabenteilen vorgenommen wird, ist die Summierung über mehrere Frames jedoch unabdingbar.

Nachjustierung

Mit dem Gittermonochromator wurde die grüne Linie ausgewählt. Als beste Stellschraube zur Qualitätsverbesserung haben sich die Linsen herausgestellt. Nachdem ihre Position öfter angepasst worden war, ergab sich das Bild aus Abb. (1.10). Mit leichter Dejustage der zweiten Linse im Strahlverlauf wurde ein Vergleichsbild aufgenommen, um die Qualität der Aufnahmen besser einschätzen zu können. Der in Abb. (1.10) rot markierte Ausschnitt ist in Abb. (1.11) zusammen mit den dejustierten Messergebnissen aufgeführt.

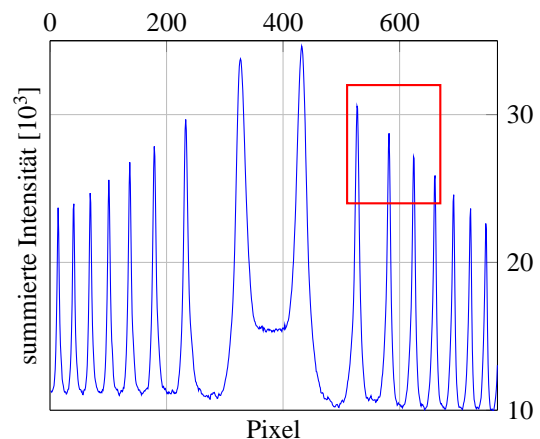


Abb. 1.10: Messergebnisse grüne Linie ohne Magnetfeld nach der Justierung. Der rote Kasten markiert den Bereich von Abb. (1.11)

Aus Abb. (1.11) geht hervor, dass sich die Position der Peaks nur geringfügig unter der Anpassung verschoben hat, allerdings konnten durch die Justierung die beiden Flanken so symmetrisch wie in Abb. (1.10) eingestellt werden. Damit hat die Linsenpositionierung einen erkennbaren aber kleinen Einfluss auf das Interferenzbild.

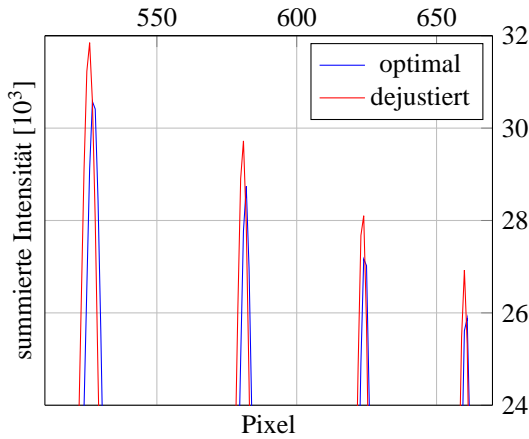


Abb. 1.11: Messergebnisse grüne Linie ohne Magnetfeld vor und nach der Justierung

effektive Brennweite

Aus Abb. (1.10) können die Positionen der Peaks abgelesen werden. Ist x_1 der linke Peak der Ordnung n und x_2 der rechte, so ergibt sich für die Mitte M der Aufnahme

$$M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (1.52)$$

und für den Radius r_n

$$r_n = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (1.53)$$

Die Fehler für die Positionen x_i wurden anhand der Peakbreite und -Deutlichkeit geschätzt. Die Ergebnisse sind in Tab. (1.3) aufgeführt. Augenfällig ist, dass die Werte für die Mitte M statistisch identisch sind, was für eine präzise und symmetrische Messung spricht. Das könnte durch eine Spiegelung des linken Teil des Diagramms auf den rechten veranschaulicht werden, auch wenn das hier der Übersichtlichkeit halber weggelassen wurde. Stattdessen sind die Spalten δx_i eingefügt worden, die ausgehend vom Mittelwert \bar{M}

$$\bar{M} = (381 \pm 4) \text{ px}$$

den relativen Fehler angeben

$$\delta x_1 = \left| \frac{\bar{M} - r_i - x_1}{x_1} \right| \quad (1.54)$$

und

$$\delta x_2 = \left| \frac{\bar{M} + r_i - x_2}{x_2} \right| \quad (1.55)$$

Diese Werte bewegen sich im Promille-Bereich. Der starke Anstieg für δx_1 bei großen i ist auf die kleinen Werte von x_i zurückzuführen. Die Ordnung i entspricht dem i aus Glg. (1.47), die zugleich die Bestimmungsgleichung für die effektive Brennweite f ist.

Trägt man nun r_i^2 über i auf, so erwartet man eine Gerade mit der Steigung

$$m = \frac{\lambda f^2}{d} \quad (1.56)$$

und dem Achsenabschnitt $b = r_0^2$.

In Abb. (1.12) sind die Messwerte und die Ausgleichsgerade eingezeichnet. Lineare Regression ergibt

$$m = (1,3943 \pm 0,0016) \text{ mm}^2$$

$$b = (0,1748 \pm 0,0068) \text{ mm}^2$$

mit dem Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = 0,999992$$

das somit sehr deutlich den linearen Zusammenhang belegt. Setzt man d und λ ein, so ergibt sich

$$f = \sqrt{\frac{md}{\lambda}} = (78,97 \pm 0,06) \text{ mm}$$

mit dem nach GAUSS'scher Fehlerfortpflanzung bestimmten Fehler

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d}{\lambda m} (\Delta m)^2 + \frac{m}{d \lambda} (\Delta d)^2 + \frac{md}{\lambda^3} (\Delta \lambda)^2} \quad (1.57)$$

wobei der Fehler von λ nach [3] mit einem typischen Wert von 0,003 nm geschätzt wurde, was dazu führt, dass der dritte Term mit $\Delta \lambda$ verschwindend klein wird.

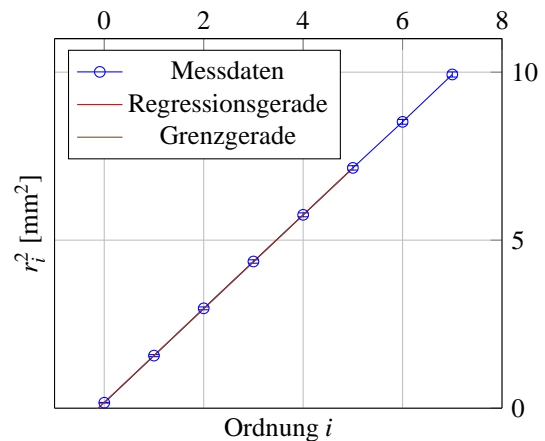


Abb. 1.12: Bestimmung der effektiven Brennweite; die Fehlerbalken sind kaum zu erkennen

Zeeman-Aufspaltung bei 546 nm

Nach Abb. (1.2) wird in Kombination mit den Auswahlregeln $\Delta m = 0, \pm 1$ erwartet, dass neun Linien zu sehen sind, davon sechs linear parallel zum Magnetfeld – also senkrecht – polarisiert (die σ -Linien) und drei horizontal linear polarisierte (die π -Linien). Dabei sind die Linien mit $\Delta m_j = +1$ die σ^+ -Linien, die mit $\Delta m_j = 0$ werden als π -Linien bezeichnet und die mit $\Delta m_j = -1$ werden als σ^- -Linien geführt. Die zu erwartenden Übergänge sind in Abb. (1.2) bereits mit der Einordnung in die drei genannten Kategorien dargestellt, werden aber dennoch hier mit den vollständigen Quantenzahlen aufgeführt.

i	x_1 [px]	x_2 [px]	M [px]	r_i [px]	r_i^2 [px ²]	δx_1 [%]	δx_2 [%]
0	(333 ± 2)	(427 ± 2)	$(380,0 \pm 2,8)$	$(47,0 \pm 2,8)$	(2210 ± 130)	2,6	2,0
1	(235 ± 2)	(526 ± 2)	$(380,5 \pm 2,8)$	$(145,5 \pm 2,8)$	(21170 ± 410)	1,6	0,7
2	(180 ± 2)	(581 ± 2)	$(380,5 \pm 2,8)$	$(200,5 \pm 2,8)$	(40200 ± 570)	2,1	0,6
3	(138 ± 2)	(624 ± 2)	$(381,0 \pm 2,8)$	$(243,0 \pm 2,8)$	(59050 ± 690)	0,9	0,2
4	(102 ± 2)	(660 ± 2)	$(381,0 \pm 2,8)$	$(279,0 \pm 2,8)$	(77840 ± 790)	1,2	0,2
5	(70 ± 2)	(692 ± 2)	$(381,0 \pm 2,8)$	$(311,0 \pm 2,8)$	(96720 ± 880)	1,8	0,2
6	(42 ± 2)	(721 ± 2)	$(381,5 \pm 2,8)$	$(339,5 \pm 2,8)$	(115260 ± 960)	14,9	0,9
7	(15 ± 2)	(748 ± 2)	$(381,5 \pm 2,8)$	$(366,5 \pm 2,8)$	(134000 ± 1000)	41,7	0,8

Tab. 1.3: Peaks aus Abb. (1.10) mit der Ordnung i , den Peakpositionen x_i , dem Mittelpunkt M , den Radien r_i und relativen Fehlern Δx_i

In der Notation $|n, L, S, J, m_j\rangle$ existieren die Übergänge

$$\begin{aligned}
 |7, 0, 1, 1, 1\rangle &\rightarrow \begin{cases} |6, 1, 1, 2, 2\rangle \\ |6, 1, 1, 2, 1\rangle \\ |6, 1, 1, 2, 0\rangle \end{cases} \\
 |7, 0, 1, 1, 0\rangle &\rightarrow \begin{cases} |6, 1, 1, 2, 1\rangle \\ |6, 1, 1, 2, 0\rangle \\ |6, 1, 1, 2, -1\rangle \end{cases} \\
 |7, 0, 1, 1, -1\rangle &\rightarrow \begin{cases} |6, 1, 1, 2, 0\rangle \\ |6, 1, 1, 2, -1\rangle \\ |6, 1, 1, 2, -2\rangle \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Messdaten wurden mit Hilfe eines entsprechend eingestellten Polarisationsfilters aufgenommen, der in den

Strahlengang vor dem Monochromator platziert wurde. An dem Wechselspiel der roten und blauen Kurven in Abb. (1.13) ist deutlich zu erkennen, dass die σ -Linien senkrecht zu den π -Linien linear polarisiert sind. Alle Messreihen wurden durch Integration über 90 Frames aufgenommen, sodass das, was von der Summe der roten und blauen Linie zur braunen fehlt der Teil ist, den der Polarisationsfilter unabhängig von der Polarisation reflektiert.

Zunächst sind nur drei Komponenten der Aufspaltung sichtbar, allerdings offenbart eine genaue Betrachtung der Peaks der Aufnahmen mit Polarisationsfilter, dass jede der beiden Flanken nicht wie bei normalen Linien erwartet [3] im LORENTZ-Profil abfällt, sondern mit einem kleineren, nebenliegenden Peak überlagert zu sein scheint. Damit ergäben sich insgesamt neun Linien, die in den drei Peaks zu sehen sind – was den Erwartungen entspricht.

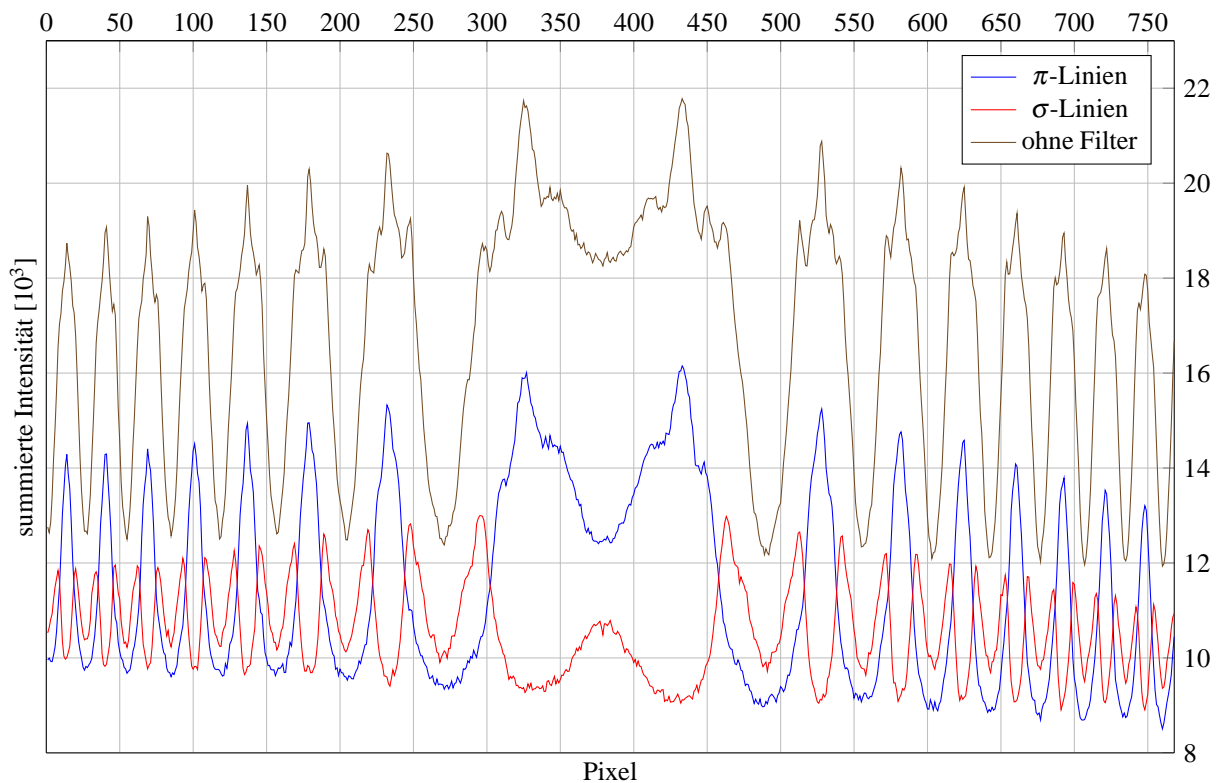


Abb. 1.13: Messergebnisse für unterschiedlich eingestellten Polarisationsfilter oder gar keinen solchen Filter bei 20Å für die grüne Linie bei 546 nm; jede Messkurve berücksichtigt 90 Frames

Um die ZEEMAN-Aufspaltung zu vermessen, wurden die Messdaten an das theoretische Modell genähert, das pro deutlich sichtbarem Peak drei Linien in Form einer LORENTZ-Kurve mit

$$I = a \frac{b}{(x-c)^2 + (b/2)^2} + g \quad (1.58)$$

vorsieht, wobei a die Skalierung, b die Halbwertsbreite und c die Position der Kurve beschreibt[3]. Da der CCD-Sensor ein Grundrauschen hat, das zwar durch das Abdecken des Aufbaus bei jeder Messung minimiert wurde, aber dennoch in den Messdaten sichtbar bleibt, wurde noch die Konstante g addiert, die für alle Linien innerhalb eines Peaks als konstant angenommen wurde. Leider müssen damit pro Peak neun Variablen gefittet werden. Wenigstens können durch den Polarisationsfilter die einzelnen Peaks so weit voneinander getrennt werden, dass der wechselseitige Einfluss vernachlässigbar klein wird. Zur Bestimmung der neun Variablen wurde zunächst jeweils der relevante Teil des Peaks geschätzt – i.d.R. die Stellen, an denen die Flanken ins Grundrauschen übergehen. Als nächstes wurden die Linienpositionen geschätzt. Ein selbstgeschriebenes Computerprogramm variierte daraufhin zufällig eine der neun Variablen um einen zufälligen Wert im Promillebereich und optimierte so die Kurven. Als Evaluationsfunktion für die Qualität der Näherung wurde der summierte quadratische Abstand zwischen genäherter Funktion und Messwerten herangezogen. Dabei fällt auf, dass die per Hand eingestellten Näherungswerte keineswegs das Optimum darstellten: auch wenn die manuell vorgegebene Funktion subjektiv näher am Kurvenverlauf lag, konnte die Evaluationsfunktion schlechter werden. Im Folgenden wurden alle Daten zu den Linienpositionen auf diese Weise ermittelt.

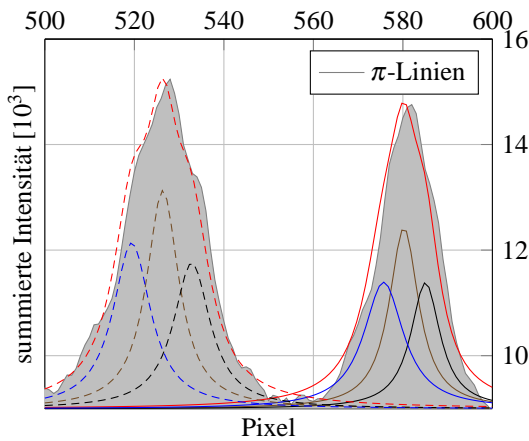


Abb. 1.14: Messergebnisse (grau ausgefüllt) für die π -Komponente bei 20A für die grüne Linie bei 546 nm und 90 Frames mit den durch die Näherung gefundenen Linien (blau, braun, schwarz) und deren Summen (rot) für die ersten beiden Peaks

Ein Beispiel für diese Näherungen ist in Abb. (1.14) visualisiert. Dabei ist deutlich zu erkennen, dass die Intensität der Linien in etwa symmetrisch ist, was den Vorhergesagten entspricht, allerdings nicht bei der Näherung vor-

ausgesetzt wurde. Das spricht für die Anwendbarkeit der Näherung auf diese Messdaten. Um mehr Punkte für die Auswertung zur Verfügung zu haben, wurde eine weitere Messreihe mit 14 A Spulenstrom aufgenommen.

Es hat sich herausgestellt, dass die Qualität der Ergebnisse stark von der Wahl des Niveau des Grundrauschens abhängt. Generell ist auffällig, dass für kleinere Magnetfelder die Aufspaltung so gering wird, dass die einzelnen Linien kaum noch zu unterscheiden sind. Hier wäre ein größerer CCD-Chip sinnvoll. Die Messergebnisse für die σ -Linien waren nur mit manuellen Eingriffen in die mit diesem Algorithmus gefundenen Möglichkeiten auswertbar.

Der Radius der Linien wurde genauso wie im vorigen Aufgabenteil bestimmt. Aus Platzgründen sind nicht mehr die einzelnen Positionen in Pixel, sondern nur die Radien in mm angegeben. Zusätzlich kann aber nach diesem Modell die normierte Intensität der Linien bestimmt und mit den Daten aus Abb. (1.2) verglichen werden. Die normierten Intensitäten wurden jeweils auf die Intensität der höchsten Linie eines Peaks normiert. Die maximale Intensität kann aus Glg. (1.58) bestimmt werden, indem $x = c$ gesetzt wird und das Grundrauschen ignoriert wird.

$$I_{\max} = a \frac{b}{(b/2)^2} = \frac{4a}{b} \quad (1.59)$$

Es werden jeweils die gefundenen Intensitäten für die rechte und linke Seite des Querschnitts durch das Ringsystem gemittelt. Da die Intensitäten nur qualitativ betrachtet werden, wurde auf eine Fehlerrechnung verzichtet; der Fehler für die Position der Peaks wird weiterhin zu zwei Pixeln geschätzt. Bei allen Messreihen wurden nur die Peaks erster Ordnung ausgewertet. In Tab. (1.4) ist zudem auch die Frequenzaufspaltung aufgeführt, die sich aus Glg. (1.50) ableiten lässt, wenn man

$$v = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta \lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (1.60)$$

einsetzt

$$\Delta v = -\frac{c}{2\lambda f^2} (r^2 - r'^2) \quad (1.61)$$

Analog gilt für die Wellenzahl \bar{v}

$$\Delta \bar{v} = -\frac{1}{2\lambda f^2} (r^2 - r'^2) = \frac{\Delta v}{c} \quad (1.62)$$

Nach der GAUSS'schen Fehlerfortpflanzung ergibt sich für den Fehler der Werte mit $\Delta r = \Delta r'$

$$\Delta(\Delta v) = v\alpha \quad (1.63)$$

$$\Delta(\Delta \bar{v}) = \frac{\Delta(\Delta v)}{c} \quad (1.64)$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{f^2} \sqrt{\frac{(r^2 - r'^2)^2 (\Delta f)^2}{f^2} + (r^2 + r'^2) (\Delta r)^2} \quad (1.65)$$

Dabei wurde wieder der Fehler der Wellenlänge vernachlässigt. Die sich daraus ergebenden Fehler sind recht groß; beide Bestandteile, also der für den Radius und der

für die effektive Brennweite tragen etwa zu gleichen Teilen bei. Eine Verringerung des Fehlers würde also bedeuten, dass beide Messungen präziser werden müssten.

Die Angaben zum Magnetfeld in Tab. (1.4) sind über die Kalibrierungskurve aus der Versuchsanleitung ermittelt worden. Der Ablesefehler wurde zu 0,01 T geschätzt,

wobei der Ablesefehler der Stromstärke mit 0,1 A gegenüber dem aus der Kalibrierkurve dominiert. Der Einfluss der Hysterese kann so jedoch nicht abgeschätzt werden, wird aber bei der Diskussion berücksichtigt. Als Wellenlänge wurde die Wellenlänge der nicht aufgespaltenen Linie eingesetzt.

Linie	r [mm]	I_{norm}	Strom [A]	$\Delta\nu$ [GHz]	$\Delta\bar{\nu}$ [cm^{-1}]	x_1 [px]	x_2 [px]
π : A	$(1,207 \pm 0,024)$	0,76	$(20 \pm 0,1)$	$(-6,3 \pm 3,9)$	$(-0,21 \pm 0,13)$	$(519,4 \pm 2,0)$	$(238,7 \pm 2,0)$
π : B	$(1,265 \pm 0,024)$	1,00	$(20 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	$(526,4 \pm 2,0)$	$(232,2 \pm 2,0)$
π : C	$(1,323 \pm 0,024)$	0,71	$(20 \pm 0,1)$	$(6,6 \pm 4,1)$	$(0,22 \pm 0,14)$	$(532,9 \pm 2,0)$	$(225,2 \pm 2,0)$
π : A	$(1,211 \pm 0,024)$	0,73	$(18 \pm 0,1)$	$(-5,9 \pm 3,9)$	$(-0,20 \pm 0,13)$	$(520,1 \pm 2,0)$	$(238,4 \pm 2,0)$
π : B	$(1,265 \pm 0,024)$	1,00	$(18 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	$(526,4 \pm 2,0)$	$(232,1 \pm 2,0)$
π : C	$(1,317 \pm 0,024)$	0,74	$(18 \pm 0,1)$	$(5,8 \pm 4,0)$	$(0,19 \pm 0,13)$	$(532,3 \pm 2,0)$	$(226,1 \pm 2,0)$
π : A	$(1,216 \pm 0,024)$	0,67	$(16 \pm 0,1)$	$(-5,2 \pm 3,8)$	$(-0,17 \pm 0,13)$	$(520,6 \pm 2,0)$	$(237,7 \pm 2,0)$
π : B	$(1,264 \pm 0,024)$	1,00	$(16 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	$(526,4 \pm 2,0)$	$(232,5 \pm 2,0)$
π : C	$(1,309 \pm 0,024)$	0,69	$(16 \pm 0,1)$	$(5,2 \pm 4,0)$	$(0,17 \pm 0,13)$	$(531,7 \pm 2,0)$	$(227,1 \pm 2,0)$
π : A	$(1,221 \pm 0,024)$	0,74	$(14 \pm 0,1)$	$(-4,8 \pm 3,8)$	$(-0,16 \pm 0,13)$	$(521,1 \pm 2,0)$	$(237,2 \pm 2,0)$
π : B	$(1,265 \pm 0,024)$	1,00	$(14 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	$(526,4 \pm 2,0)$	$(232,3 \pm 2,0)$
π : C	$(1,307 \pm 0,024)$	0,75	$(14 \pm 0,1)$	$(4,8 \pm 4,0)$	$(0,16 \pm 0,13)$	$(531,2 \pm 2,0)$	$(227,2 \pm 2,0)$
π : A	$(1,227 \pm 0,024)$	0,72	$(12 \pm 0,1)$	$(-4,1 \pm 3,8)$	$(-0,14 \pm 0,13)$	$(521,6 \pm 2,0)$	$(236,3 \pm 2,0)$
π : B	$(1,265 \pm 0,024)$	1,00	$(12 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	$(526,4 \pm 2,0)$	$(232,3 \pm 2,0)$
π : C	$(1,300 \pm 0,024)$	0,75	$(12 \pm 0,1)$	$(4,0 \pm 3,9)$	$(0,13 \pm 0,13)$	$(530,2 \pm 2,0)$	$(227,9 \pm 2,0)$
σ^- : A	$(1,381 \pm 0,024)$	1,00	$(20 \pm 0,1)$	$(13,5 \pm 4,8)$	$(0,45 \pm 0,16)$	$(540,2 \pm 2,0)$	$(219,0 \pm 2,0)$
σ^- : B	$(1,422 \pm 0,024)$	0,71	$(20 \pm 0,1)$	$(18,6 \pm 5,4)$	$(0,62 \pm 0,18)$	$(544,9 \pm 2,0)$	$(214,1 \pm 2,0)$
σ^- : C	$(1,470 \pm 0,024)$	0,33	$(20 \pm 0,1)$	$(24,7 \pm 6,3)$	$(0,82 \pm 0,21)$	$(549,3 \pm 2,0)$	$(207,4 \pm 2,0)$
σ^- : A	$(1,375 \pm 0,024)$	1,00	$(18 \pm 0,1)$	$(12,7 \pm 4,7)$	$(0,42 \pm 0,16)$	$(539,8 \pm 2,0)$	$(220,1 \pm 2,0)$
σ^- : B	$(1,414 \pm 0,024)$	0,46	$(18 \pm 0,1)$	$(17,5 \pm 5,3)$	$(0,58 \pm 0,18)$	$(544,2 \pm 2,0)$	$(215,4 \pm 2,0)$
σ^- : C	$(1,456 \pm 0,024)$	0,08	$(18 \pm 0,1)$	$(22,9 \pm 6,1)$	$(0,76 \pm 0,20)$	$(548,9 \pm 2,0)$	$(210,2 \pm 2,0)$
σ^- : A	$(1,364 \pm 0,024)$	1,00	$(16 \pm 0,1)$	$(11,6 \pm 4,5)$	$(0,39 \pm 0,15)$	$(538,4 \pm 2,0)$	$(221,1 \pm 2,0)$
σ^- : B	$(1,403 \pm 0,024)$	0,41	$(16 \pm 0,1)$	$(16,4 \pm 5,1)$	$(0,55 \pm 0,17)$	$(543,6 \pm 2,0)$	$(217,2 \pm 2,0)$
σ^- : C	$(1,443 \pm 0,024)$	0,13	$(16 \pm 0,1)$	$(21,4 \pm 5,8)$	$(0,71 \pm 0,19)$	$(546,8 \pm 2,0)$	$(211,3 \pm 2,0)$
σ^- : A	$(1,358 \pm 0,024)$	1,00	$(14 \pm 0,1)$	$(10,8 \pm 4,5)$	$(0,36 \pm 0,15)$	$(538,2 \pm 2,0)$	$(222,4 \pm 2,0)$
σ^- : B	$(1,399 \pm 0,024)$	0,27	$(14 \pm 0,1)$	$(15,8 \pm 5,0)$	$(0,53 \pm 0,17)$	$(542,5 \pm 2,0)$	$(217,1 \pm 2,0)$
σ^- : C	$(1,436 \pm 0,024)$	0,11	$(14 \pm 0,1)$	$(20,3 \pm 5,7)$	$(0,68 \pm 0,19)$	$(547,3 \pm 2,0)$	$(213,4 \pm 2,0)$
σ^- : A	$(1,347 \pm 0,024)$	1,00	$(12 \pm 0,1)$	$(9,5 \pm 4,3)$	$(0,32 \pm 0,14)$	$(536,8 \pm 2,0)$	$(223,6 \pm 2,0)$
σ^- : B	$(1,387 \pm 0,024)$	0,25	$(12 \pm 0,1)$	$(14,3 \pm 4,9)$	$(0,48 \pm 0,16)$	$(540,5 \pm 2,0)$	$(217,9 \pm 2,0)$
σ^- : C	$(1,429 \pm 0,024)$	0,03	$(12 \pm 0,1)$	$(19,5 \pm 5,6)$	$(0,65 \pm 0,19)$	$(543,6 \pm 2,0)$	$(211,2 \pm 2,0)$
σ^+ : A	$(1,005 \pm 0,024)$	0,22	$(20 \pm 0,1)$	$(-25,9 \pm 6,1)$	$(-0,87 \pm 0,20)$	$(500,5 \pm 2,0)$	$(266,7 \pm 2,0)$
σ^+ : B	$(1,094 \pm 0,024)$	0,44	$(20 \pm 0,1)$	$(-17,7 \pm 5,0)$	$(-0,59 \pm 0,17)$	$(507,0 \pm 2,0)$	$(252,5 \pm 2,0)$
σ^+ : C	$(1,151 \pm 0,024)$	1,00	$(20 \pm 0,1)$	$(-12,0 \pm 4,3)$	$(-0,40 \pm 0,14)$	$(513,5 \pm 2,0)$	$(245,7 \pm 2,0)$
σ^+ : A	$(1,020 \pm 0,024)$	0,10	$(18 \pm 0,1)$	$(-24,7 \pm 5,9)$	$(-0,82 \pm 0,20)$	$(498,2 \pm 2,0)$	$(261,0 \pm 2,0)$
σ^+ : B	$(1,083 \pm 0,024)$	0,45	$(18 \pm 0,1)$	$(-18,8 \pm 5,1)$	$(-0,63 \pm 0,17)$	$(506,0 \pm 2,0)$	$(254,1 \pm 2,0)$
σ^+ : C	$(1,146 \pm 0,024)$	1,00	$(18 \pm 0,1)$	$(-12,7 \pm 4,4)$	$(-0,42 \pm 0,15)$	$(512,9 \pm 2,0)$	$(246,4 \pm 2,0)$
σ^+ : A	$(1,036 \pm 0,024)$	0,13	$(16 \pm 0,1)$	$(-23,0 \pm 5,7)$	$(-0,77 \pm 0,19)$	$(502,3 \pm 2,0)$	$(261,3 \pm 2,0)$
σ^+ : B	$(1,102 \pm 0,024)$	0,43	$(16 \pm 0,1)$	$(-16,8 \pm 4,8)$	$(-0,56 \pm 0,16)$	$(508,2 \pm 2,0)$	$(252,0 \pm 2,0)$
σ^+ : C	$(1,155 \pm 0,024)$	1,00	$(16 \pm 0,1)$	$(-11,6 \pm 4,3)$	$(-0,39 \pm 0,14)$	$(513,9 \pm 2,0)$	$(245,3 \pm 2,0)$
σ^+ : A	$(1,074 \pm 0,024)$	0,17	$(14 \pm 0,1)$	$(-19,6 \pm 5,2)$	$(-0,66 \pm 0,17)$	$(505,0 \pm 2,0)$	$(255,3 \pm 2,0)$
σ^+ : B	$(1,119 \pm 0,024)$	0,48	$(14 \pm 0,1)$	$(-15,3 \pm 4,7)$	$(-0,51 \pm 0,16)$	$(510,5 \pm 2,0)$	$(250,2 \pm 2,0)$
σ^+ : C	$(1,170 \pm 0,024)$	1,00	$(14 \pm 0,1)$	$(-10,1 \pm 4,1)$	$(-0,34 \pm 0,14)$	$(516,0 \pm 2,0)$	$(243,9 \pm 2,0)$
σ^+ : A	$(1,074 \pm 0,024)$	0,07	$(12 \pm 0,1)$	$(-19,6 \pm 5,2)$	$(-0,66 \pm 0,17)$	$(505,1 \pm 2,0)$	$(255,4 \pm 2,0)$
σ^+ : B	$(1,126 \pm 0,024)$	0,34	$(12 \pm 0,1)$	$(-14,6 \pm 4,6)$	$(-0,49 \pm 0,15)$	$(511,2 \pm 2,0)$	$(249,3 \pm 2,0)$
σ^+ : C	$(1,180 \pm 0,024)$	1,00	$(12 \pm 0,1)$	$(-9,1 \pm 4,1)$	$(-0,30 \pm 0,14)$	$(517,3 \pm 2,0)$	$(242,8 \pm 2,0)$

Tab. 1.4: Messergebnisse für die grüne Linie: Aufspaltung im Magnetfeld; A, B und C kennzeichnen die einzelnen Komponenten mit aufsteigender Energie; I_{norm} ist die relative Intensität normiert auf die stärkste Linie einer zusammenhängenden Gruppe (A, B, C); die Nachkommastelle des Stroms wäre bei allen Werten Null und ist aus Platzgründen nicht in der Tabelle aufgeführt

Zusammen mit den Ablesewerten aus der Kalibrierungskurve in Tab. (1.5) lässt sich nun die ZEEMAN-Aufspaltung in Abb. (1.15) grafisch darstellen.

I [A]	B [T]
$(12,0 \pm 0,1)$	$(0,57 \pm 0,01)$
$(14,0 \pm 0,1)$	$(0,66 \pm 0,01)$
$(16,0 \pm 0,1)$	$(0,75 \pm 0,01)$
$(18,0 \pm 0,1)$	$(0,82 \pm 0,01)$
$(20,0 \pm 0,1)$	$(0,89 \pm 0,01)$

Tab. 1.5: Umrechnung von Stromstärke zu Magnetfeld nach der Kalibrierungskurve

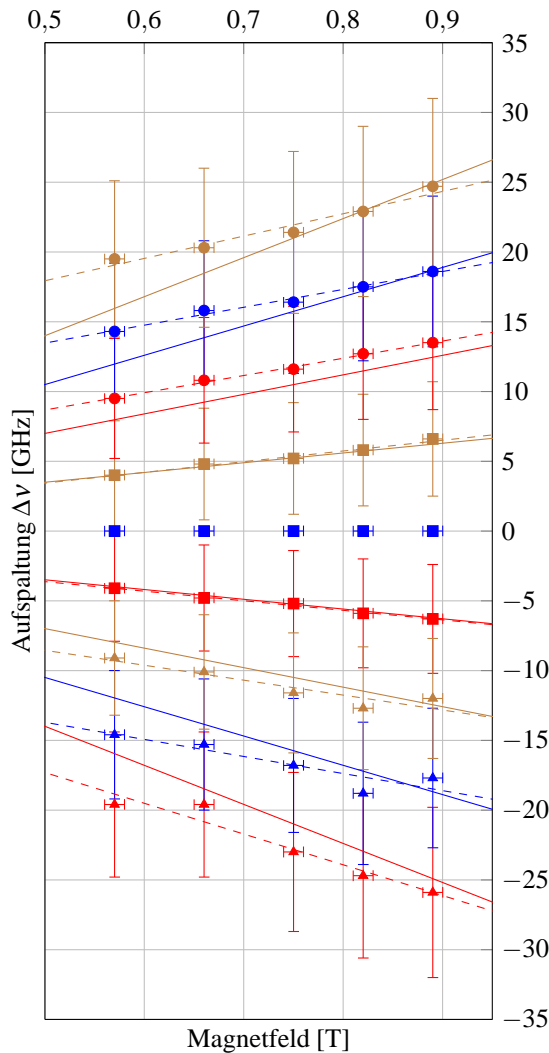


Abb. 1.15: Frequenzaufspaltung der ZEEMAN-Komponenten in Abhängigkeit des Magnetfeldes für die grüne 546 nm-Linie mit Regressionsgeraden (gestrichelt). Die Farben rot, blau, braun geben die Gruppen A, B, C aus Tab. (1.4) an, die σ^+ -Linien sind mit einem Dreieck, die π -Linien mit einem Viereck und die σ^- -Linien mit einem Kreis markiert; die durchgezogenen Linien geben den theoretischen Verlauf an; die nächstliegenden gleichfarbigen Geraden gehören jeweils zusammen

Alle Messwerte stimmen im Rahmen der Fehler mit den theoretischen Vorhersagen überein. Nach Berechnung der Regressionsgeraden für Abb. (1.15) wurde erkennbar, dass zwar das Bestimmtheitsmaß in den meisten Fällen gut ist, jedoch die Ausgleichsgeraden einen teilweise deutlich von Null verschiedenen Achsenabschnitt (vgl. Tab. (1.6)) haben, was den Erwartungen widerspricht, da für ein nicht existentes Magnetfeld $\Delta\nu = 0$ gilt. Das lässt darauf schließen, dass die Peaks an leicht verschobenen Positionen gemessen wurden. Die Tendenz der Geraden ist jedoch korrekt; bei den π -Linien, die auch die deutlichsten Messreihen ergaben, ist der Achsenabschnitt nahe bei Null. Für die π -Linien ist auch die Übereinstimmung der Regressionsgeraden mit den theoretischen Daten am größten. Auf eine Fehlerrechnung für die Steigung der Ausgleichsgeraden wurde verzichtet, weil sie keine weiteren Informationen brächte.

Linie	R^2	b [GHz]
π : A	0,99	-0,2
π : B	-	-
π : C	0,98	-0,4
σ^- : A	0,99	2,5
σ^- : B	0,98	7,1
σ^- : C	0,95	9,9
σ^+ : A	0,93	-6,3
σ^+ : B	0,82	-7,6
σ^+ : C	0,85	-3,2

Tab. 1.6: ausgewählte Kenndaten der Ausgleichsgeraden: Bestimmtheitsmaß R^2 und Achsenabschnitt b ; π : B ist die nicht verschobene Referenzlinie

Nun können aber auch die Intensitäten aus Tab. (1.4) mit den Literaturwerten nach [4] verglichen werden. Mittelt man die normierten Intensitäten über die verschiedenen Messungen bei unterschiedlichem Magnetfeld, so erhält man für die π -Linien das Verhältnis A:B:C mit den gemessenen Werten links und den theoretischen rechts

$$0,72 : 1,00 : 0,73 \quad 0,75 : 1,00 : 0,75$$

für die σ^- -Linien

$$1,00 : 0,42 : 0,13 \quad 1,00 : 0,50 : 0,16$$

und analog für die σ^+ -Linien

$$0,14 : 0,43 : 1,00 \quad 0,16 : 0,50 : 1,00$$

trotz eines relativen Fehlers zwischen 4 und 19% stimmt Verlauf der Intensitäten gut mit den theoretischen Werten überein.

Zeeman-Aufspaltung bei 577 nm

Der Übergang $6^3D_2 \rightarrow 6^1P_1$ entspricht dem Übergang bei 546 nm, nur dass die g_j -Faktoren mit 7/6 und 1 anders sind. Die Auswahlregeln bleiben bestehen, sodass hier neun Linien erwartet werden. Mit dem Übergang $6^1D_2 \rightarrow 6^1P_1$ bei dem beide Energieniveaus den g_j -Faktor

1 haben, sind zwar auch neun Linien möglich, die jedoch wegen der identischen g_j -Faktoren nur drei Linien ergeben. Insgesamt werden also zwölf Linien erwartet – die beiden gelben Spektrallinien ließen sich ja nicht trennen – deren Polarisierung der bei der 546 nm-Linie entspricht, also sind je vier Linien σ^+ -, σ^- - und π -Linien von denen die ersten beiden Gruppen senkrecht zur letzten Gruppe linear polarisiert ist.

Bei den Messdaten für diesen Versuchsteil zeigten sich einige Schwierigkeiten. So sind die mit dem Polarisationsfilter aufgenommenen Daten für die σ -Linien i.d.R. so schwach ausgeprägt, dass die Peaks im Grundrauschen untergehen. Daher wurde das jeweils ohne Polarisator aufgenommene Bild ausgewertet. Aber selbst dieses Bild wurde bei 12 A Spulenstrom zu verrauscht. Beispiele sind in Abb. (1.16) und Abb. (1.17) angegeben. Somit ergeben sich insgesamt neun Messpunkte, die in Tab. (1.7) aufgelistet und in Abb. (1.18) in Bezug auf die Feldabhängigkeit aufgetragen sind.

Auch hier ist der lineare Zusammenhang mit Bestimmtheitsmaßen von $R^2 = 0,98$ für die σ^+ -Linien und $R^2 = 0,97$ für die σ^- -Linien gut bestätigt, zumal der Achsenabschnitt mit $-0,6$ und $3,7$ schon deutlich näher an dem erwarteten Wert Null liegt, als es noch bei der letzten Auswertung der Fall war.

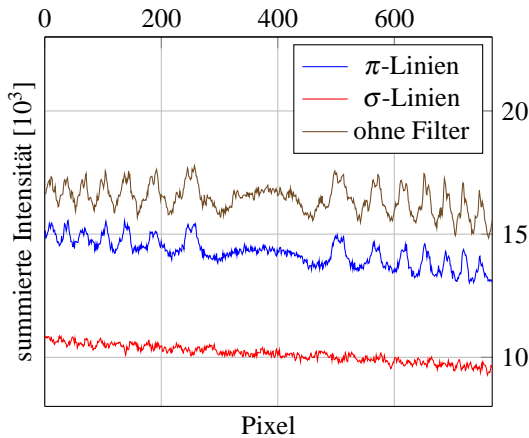


Abb. 1.16: Messergebnisse für unterschiedlich eingestellten Polarisationsfilter oder gar keinen solchen Filter bei 20A für die gelben Linien bei 577 nm

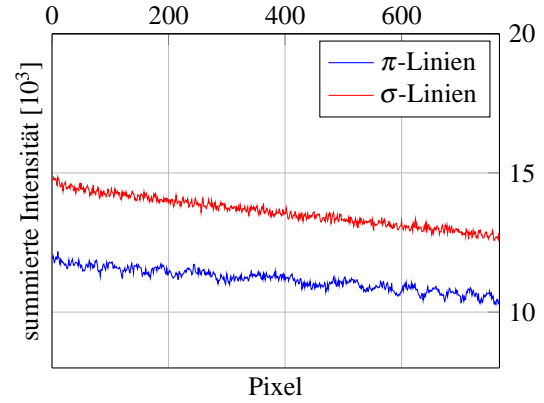


Abb. 1.17: Messergebnisse für unterschiedlich eingestellten Polarisationsfilter oder gar keinen solchen Filter bei 12A für die gelben Linien bei 577 nm

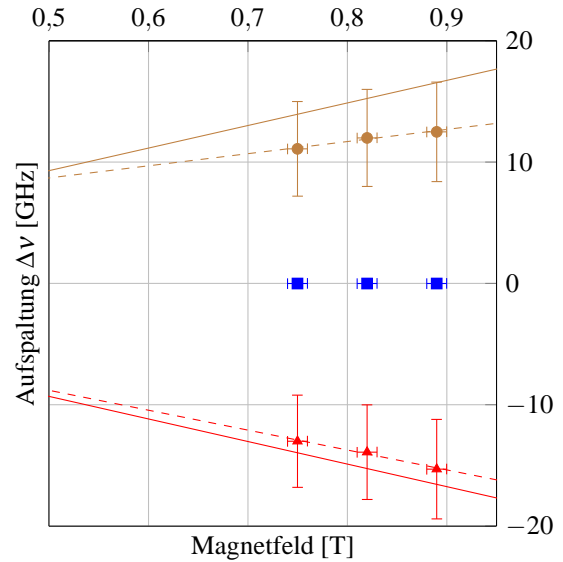


Abb. 1.18: Frequenzaufspaltung der ZEEMAN-Komponenten in Abhängigkeit des Magnetfeldes für die grüne 546 nm-Linie mit Regressionsgeraden (gestrichelt). Die σ^+ -Linien sind mit einem Dreieck, die π -Linien mit einem Viereck und die σ^- -Linien mit einem Kreis markiert; die durchgezogenen Linien geben die erwarteten Zusammenhänge an

Linie	r [mm]	Strom [A]	$\Delta\nu$ [GHz]	$\Delta\bar{\nu}$ [cm^{-1}]	x_1 [px]	x_2 [px]
σ^+	$(0,847 \pm 0,024)$	$(20,0 \pm 0,1)$	$(-15,3 \pm 4,1)$	$(-0,51 \pm 0,14)$	(475 ± 2)	(278 ± 2)
π	$(1,032 \pm 0,024)$	$(20 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	(497 ± 2)	(257 ± 2)
σ^-	$(1,161 \pm 0,024)$	$(20 \pm 0,1)$	$(12,5 \pm 4,1)$	$(0,42 \pm 0,14)$	(515 ± 2)	(245 ± 2)
σ^+	$(0,860 \pm 0,024)$	$(18 \pm 0,1)$	$(-13,9 \pm 3,9)$	$(-0,46 \pm 0,13)$	(477 ± 2)	(277 ± 2)
π	$(1,028 \pm 0,024)$	$(18 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	(497 ± 2)	(258 ± 2)
σ^-	$(1,152 \pm 0,024)$	$(18 \pm 0,1)$	$(12,0 \pm 4,0)$	$(0,40 \pm 0,13)$	(512 ± 2)	(244 ± 2)
σ^+	$(0,877 \pm 0,024)$	$(16 \pm 0,1)$	$(-13,0 \pm 3,8)$	$(-0,43 \pm 0,13)$	(480 ± 2)	(276 ± 2)
π	$(1,032 \pm 0,024)$	$(16 \pm 0,1)$	$(0,0 \pm 0,0)$	$(0,00 \pm 0,00)$	(497 ± 2)	(257 ± 2)
σ^-	$(1,148 \pm 0,024)$	$(16 \pm 0,1)$	$(11,1 \pm 3,9)$	$(0,37 \pm 0,13)$	(510 ± 2)	(243 ± 2)

Tab. 1.7: Messergebnisse für die gelben Linien: Aufspaltung im Magnetfeld

Laut [9] sind die σ - und π -Linien des Übergangs $6^3D_2 \rightarrow 6^1P_1$ mit $m_j: -2 \rightarrow -1, 2 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 0$ am intensivsten. Für diese Linien wurden die theoretischen Kurven in Abb. (1.18) berechnet; sie stimmen mit den Messwerten im Rahmen des Fehlers überein.

Bestimmung der g_j -Faktoren

Am einfachsten ist die Bestimmung der g_j -Faktoren für die Übergänge mit mindestens einem m_j , das Null ist, weil allgemein

$$\Delta v = \frac{\mu_B B}{h} (m_1 g_1 - m_2 g_2) \quad (1.66)$$

gilt und mit z.B. $m_2 = 0$ daraus

$$g_1 = \frac{h \Delta v}{\mu_B B m_1} \quad (1.67)$$

wird, was eine direkte Bestimmung des Faktors aus nur einem Messpunkt ermöglicht – schließlich soll sich eine Ursprungsgerade ergeben. In diesem Fall gilt für den Fehler

$$\Delta g_1 = \frac{h}{\mu_B B m_1} \sqrt{(\Delta(\Delta v))^2 + \frac{(\Delta B \Delta v)^2}{B^2}} \quad (1.68)$$

Auf diese Weise lassen sich für vier der neun Übergänge Werte von g_j errechnen. Die für jeden Punkt ermittelten Werte wurden innerhalb einer Gruppe A, B, C nach Abb. (1.15) gemittelt. Die π : B-Linie entspricht der Linie ohne anliegendes Magnetfeld und ermöglicht mit beiden $m_j = 0$ keine Bestimmung von g_j . Es bleiben also noch vier Linien: zwei π -Linien und zwei σ -Linien, die in diesen Paaren als Gleichungssystem nach Glg. (1.66) angesehen werden könnten. Wegen der Symmetrie des Problems lassen sich diese LGS jedoch nicht lösen. Daher wurde bei den anderen vier Linien ein g_j als bekannt angesetzt und die der andere Faktor jeweils berechnet. Die Ergebnisse sind in Tab. (1.8) aufgeführt, wobei aus Platzgründen nur die Mittelwerte inkl. deren Fehler der insgesamt 60 Datensätze aufgeführt sind. Die Ergebnisse für die π -Linien sind deutlich näher an den theoretischen Angaben, weil

Diskussion

Die Diskussion der Messergebnisse ist z.T. schon bei den Daten selbst erfolgt. Im Übrigen scheint es zwei Verbesserungsmöglichkeiten zu geben: den Sensor und den Monochromator. Es wäre wünschenswert, durch den Monochromator die beiden gelben Linien besser trennen zu können, was zumindest theoretisch mit den Blenden möglich sein müsste. Allerdings wäre es experimentell leichter, wenn die Blende nicht direkt hinter dem Monochromator, sondern direkt vor dem Interferometer angebracht wäre oder aber zumindest die Spaltposition der Blende vor dem Monochromator variabel statt fest wäre. In diesem Fall könnten die gelben Linien besser vermessen werden. In diesem Zusammenhang wäre mehr als die eine

auch die Messwerte nach Abb. (1.15) genauer sind. Alle Werte sind im Rahmen des Fehlers mit den theoretischen identisch; die meisten wären es sogar mit einem deutlich geringeren Fehler.

Linie	g_1	g_2
π : A	$(2,00 \pm 0,38)$	$(1,49 \pm 0,38)$
π : C	$(2,01 \pm 0,40)$	$(1,49 \pm 0,40)$
σ^- : A	$(1,86 \pm 0,45)$	$(1,57 \pm 0,45)$
σ^- : B	–	$(1,62 \pm 0,52)$
σ^- : C	$(2,13 \pm 0,58)$	–
σ^+ : A	$(2,20 \pm 0,55)$	–
σ^+ : B	–	$(1,63 \pm 0,49)$
σ^+ : C	$(1,92 \pm 0,42)$	$(1,54 \pm 0,42)$

Tab. 1.8: Messergebnisse für die grüne Linie: g_1 ist nach theoretischen Vorgaben 2, g_2 entspricht 3/2.

Linie	g_1	g_2
σ^- : A	$(1,29 \pm 0,35)$	$(1,01 \pm 0,35)$
σ^+ : C	$(1,11 \pm 0,34)$	$(1,10 \pm 0,34)$

Tab. 1.9: Messergebnisse für die gelben Linien: g_1 ist nach theoretischen Vorgaben 7/6, g_2 entspricht 1.

Analog wurden die Ergebnisse in Tab. (1.9) gewonnen. Allerdings unterscheiden sich die Mittelwerte so wenig, dass trotz statistischer Übereinstimmung nicht davon gesprochen werden kann, dass damit die Theorie bestätigt werden konnte. Das entspricht auch den Resultaten aus Abb. (1.18), die keine gute Übereinstimmung zeigten. Zur Kontrolle kann jedoch umgekehrt mit den Ergebnissen μ_B errechnet werden, was aus Platzgründen nur für die π : A-Linie für den Messwert bei größtem Magnetfeld erfolgt. Man findet unter Abschätzung des Fehlers mit dem relativen Fehler der g_j -Faktoren mit drei Prozent Abweichung nach unten zum Literaturwert

$$\mu_B = (9,0 \pm 1,7) \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Stunde Messzeit, die der Kühlung der Spulen geschuldet war, nützlich, da dann über noch mehr Frames integriert werden könnte.

Diese Summierung würde auch verbessert, wenn man das Rauschen des Sensors besser in den Griff bekäme. So wäre das Kühlen des CCD-Sensors und die Aufnahme einer Nulllinie (dunkler Sensor über viele Frames summieren), die man dann von den Messergebnissen abziehen kann, sehr hilfreich. Das hätte zur Folge, dass das Nullniveau, auf dem die LORENTZ-Kurven bei der automatischen Approximation aufbauen, präziser bestimmt werden könnte. Dieses Nullniveau beeinflusst zumindest die Ergebnisse zu den relativen Intensitäten sehr.

Die automatische Näherung könnte noch dahingehend verbessert werden, dass der Fit über alle Interferenzordnungen und Peaks gleichzeitig erfolgt, da LORENTZ-Kurven eine vergleichsweise ausgeprägte Flanke haben. Die damit etwa 90 freien Variablen für die π -Linien bei 546 nm würden aber einen deutlich erweiterten Algorithmus erfordern und wäre erst mit einer aufgenommenen Nulllinie sinnvoll. Hilfsweise kann der Sensor vergrößert

werden oder aber die Ringe werden durch die Optik vergrößert, sodass zumindest die inneren Ringe, die wesentlich für die Messergebnisse sind, besser aufgelöst werden können.

Der Fehler durch das Magnetfeld ist vergleichsweise klein, könnte aber durch eine Hallsonde weiter verringert werden, da in diesem Aufbau Hystereseffekte vernachlässigt wurden.

Literatur

- [1] *Manual Monochromator*. Jarrel Ash Inc.
- [2] H. Anders. Transmission der Spiegel [des Versuchs]. Anlage zum Praktikum, vor 1993.
- [3] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3*. Springer, 2010.
- [4] J. Yoon G. Hess. Zeeman effect. <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/317/zeeman/zeeman.html>, 2003.
- [5] K. Hellwege. *Einführung in die Physik der Atome*. Springer, 1974.
- [6] W. Wiese J. Fuhr. *CRC Handbook of Chemistry & Physics: NIST Atomic Transition Probability Tables*. CRC Press Inc., 1996.
- [7] G. Reider. *Photonik: eine Einführung in die Grundlagen*. Springer, 2005.
- [8] R. Schmidt. *Physiologie des Menschen*. Springer, 2007.
- [9] A. Thorndike. The zeeman effect in mercury. http://soundideas.pugetsound.edu/summer_research/83/, 2011.